9. Diagonalisierbarkeit

9.1 Def: Matrizen $A, A' \in Mat_K(m \times n)$ sind äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in Mat_K(m \times m)$, $T \in Mat_K(n \times n)$ gibt mit

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot T$$

Quadratische Matrizen $A, A' \in Mat_K(n \times n)$ sind ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in Mat_K(n \times n)$ gibt mit

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

Notiz: äquivalent $\Leftarrow$ ähnlich

Bsp: $\left.\begin{array}{l} A \text{ invertierbar} \\ A' \text{ nicht invertierbar} \end{array}\right\} \Rightarrow A, A'$ weder äquivalent noch ähnlich

9.2 Notiz (abstrakte Sichtweise):

A, A' äquivalent $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} A, A' \text{ stellen bezüglich geeigneter Basen dieselbe Abbildung dar:} \\ \exists \text{ lineare Abb. } f: V \to W \text{ und Basen } B, B', C, C', \\ \text{sodass:} \\ \qquad A = {}_C M_B(f) \\ \qquad A' = {}_{C'} M_{B'}(f) \end{array} \right.$

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "A = {}_C M_B(f)"] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "T = {}_B M_{B'}(\mathrm{id})", "\cong"'] \arrow[ur, "\varphi_{B'}", "\cong"'] \arrow[rrr, "A' = {}_{C'} M_{B'}"'] & & & K^m \arrow[uu, "\cong", "S = {}_C M_{C'}(\mathrm{id})"'] \arrow[ul, "\varphi_{C'}"', "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

A, A' ähnlich $\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} A, A' \text{ stellen bezüglich geeigneter Basen denselben Endomorphismus dar:} \\ \exists \text{ Endomorph. } f: V \to V \text{ und Basen } B, B', \cancel{C, C'}, \text{ sodass:} \\ \qquad A = {}_{B}M_{B}(f) \\ \qquad A' = {}_{B'}M_{B'}(f) \end{array} \right.$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "A = {}_{B}M_{B}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_B"', "\cong"] & & & K^n \arrow[dl, "\varphi_B", "\cong"'] \\
& V \arrow[r, "f"] & V & \\
K^n \arrow[uu, "T = {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id})", "\cong"'] \arrow[ur, "\varphi_{B'}", "\cong"'] \arrow[rrr, "A' = {}_{B'}M_{B'}"'] & & & K^n \arrow[uu, "T = {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id})"', "\cong"] \arrow[ul, "\varphi_{B'}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Satz 9.3 (Äquivalenz konkret):

① Jede Matrix $A \in Mat_K(m \times n)$ ist äquivalent zu Matrix in Normalform

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ mit $r = rk\, A$

② $A, A' \in Mat_K(m \times n)$ äquivalent $\iff rk\, A = rk\, A'$.

Beweis: Kombiniere:

Satz 6.20: Zeilentrafo $\hat{=}$ Linksmult. mit Elementarmatrix
Spaltentrafo $\hat{=}$ Rechtsmult. mit Elementarmatrix

Satz 6.26: Normalform lässt sich durch Zeilen- & Spaltentrafos erreichen.

Korollar 6.22: Trafos ändern Rang nicht. $\square$

Ziel: Konkrete Beschreibung von Ähnlichkeit

Das ist deutlich schwieriger.
Werden u. A. sehen:

① Manche Matrizen sind ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$ für gewisse $a_i \in K$

② A, A' ähnlich $\Rightarrow A, A'$ haben dasselbe char. Polynom

9.4 Def: Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a_i \in K$$

$A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist *diagonalisierbar*, falls sie ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix.

Ein Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ (auf einem endlich-dim. VR V) ist *diagonalisierbar*, falls es eine Basis B von V gibt, sodass ${}_BM_B(f)$ Diagonalmatrix ist.

(Äquivalent: falls für beliebige Basis B ${}_BM_B(f)$ diagonalisierbar ist.)

Beispiel: $A := \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix

$f_A: K^n \longrightarrow K^n$ hat EW $a_1, \dots, a_n$;

Ein EV zu a_i ist Standardbasisvektor $\underline{e}_i$:

$$f_A(\underline{e}_i) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_i \cdot \underline{e}_i$$

Allgemeiner:

Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ Basis von V, $f: V \longrightarrow V$ mit

$$ {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}, $$

so ist $\underline{b}_i$ EV zum EW a_i.

$$ f(\underline{b}_i) = a_i \cdot \underline{b}_i $$

⚠ Selbst wenn f diagonalisierbar ist, ist nicht jeder Vektor $\neq \underline{0}$ ein EV.

Beispiel: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein EV:

$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} $$ ← kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9.5 Def: V endlich-dim. VR, $f: V \longrightarrow V$ Endomorphismus.
$a \in K$ ist **Eigenwert** (EW) von f, falls es $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ gibt, sodass

$$f(\underline{v}) = a \cdot \underline{v}$$

$\underline{v}$ heißt dann **Eigenvektor** (EV) zum EW a.

Der **Eigenraum** von f zu $a \in K$ ist die Menge aller EV zu a zusammen mit $\underline{0}$:

$$\mathrm{Eig}(f;a) := \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = a \cdot \underline{v}\}$$

9.6 Notiz: Eigenräume sind UVR.

($\underline{0} \in \mathrm{Eig}(f;a)$ ✓

Sind $\underline{v}$ und $\underline{w} \in \mathrm{Eig}(f;a)$, so ist auch $\underline{v}+\underline{w} \in \mathrm{Eig}(f;a)$:

$$f(\underline{v}+\underline{w}) \underset{f \text{ linear}}{=} f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = a \cdot \underline{v} + a \cdot \underline{w}$$
$$= a \cdot (\underline{v}+\underline{w})$$

Ist $\underline{v} \in \mathrm{Eig}(f;a)$, $b \in K$, so ist $b \cdot \underline{v} \in \mathrm{Eig}(f;a)$ [...])

9.7 Notiz: $f: V \longrightarrow V$ diagonalisierbar

$\iff$ $\exists$ Basis von V, die nur aus EV von f besteht

(siehe Beispiel nach Def. 9.4)

9.8 Notiz: Ein Vektor kann EV zu höchstens einem EW sein:

$$\mathrm{Eig}(f;a) \cap \mathrm{Eig}(f;b) = \{\underline{0}\}$$

für $a \neq b$

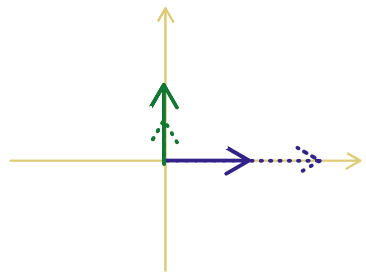
(Für $\underline{v} \in \mathrm{Eig}(f;a) \cap \mathrm{Eig}(f;b)$ gilt:

$b \cdot \underline{v} = f(\underline{v}) = a \cdot \underline{v}$, also

$\underbrace{(b-a)}_{\neq 0} \cdot \underline{v} = \underline{0}$, also folgt $\underline{v} = \underline{0}$.)

Beispiele:

① $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zum EW 2

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW $\frac{1}{2}$

② $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft f \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1

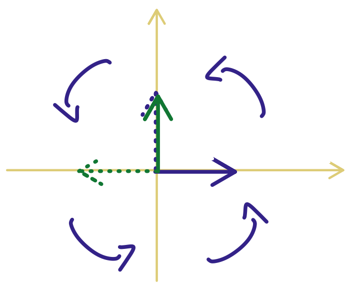
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 3

Wählen wir $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,

ist also ${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

③ $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

hat keine EV!



(Rotation um 90°)

9.9 Satz: $f: V \longrightarrow V$ Endomorphismus.
EV $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell$ von f zu paarweise verschiedenen (d.h.: $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$) EW $a_1, \dots, a_\ell$ sind linear unabhängig

Beweis: Induktion über ℓ.

IA: $\ell = 1$: Per Def. von EV ist $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, somit ist $(\underline{v}_1)$ linear unabhängig.

IV: Satz gilt für $\ell - 1$ EW.

IS: Angenommen,

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0} \qquad (s_i \in K)$$

f

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} s_i \cdot a_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

$\cdot\, a_\ell$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} s_i \cdot a_\ell \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

Differenz aus (1) & (2):

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} s_i \cdot (a_i - a_\ell) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

$i = \ell$: $\quad s_\ell \cdot (\cancel{a_\ell - a_\ell}) \cdot \underline{v}_\ell$

Da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{\ell-1}$ nach IV linear unabh. sind, folgt:

$$s_i \cdot \underbrace{(a_i - a_\ell)}_{\neq 0} = 0 \quad \text{für } i \in \{1, \dots, \ell-1\}$$

Somit folgt $\boxed{s_i = 0 \quad \text{für } i \in \{1, \dots, \ell-1\}}$.
Eingesetzt in (*) folgt

$$s_\ell \cdot \underline{v}_\ell = 0$$

und somit (da $\underline{v}_\ell \neq \underline{0}$) auch $\boxed{s_\ell = 0}$. $\square$

9.10 Geometrisches Diagonalisierbarkeitskriterium

Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen EW von $f: V \to V$, V endlich-dim. Dann gilt:

(a) f diagonalisierbar

$\Updownarrow$

(b) $\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i) = V$ („V zerfällt in die Eigenräume")

$\Updownarrow$

(c) $\sum_{i=1}^{\ell} \dim \mathrm{Eig}(f, a_i) = \dim V$

Erinnerung zu (b):

$\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i) = V$ bedeutet laut Def. 4.21:

$\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i) \xrightarrow{(*)} V$ ist ein Isomorphismus.

$(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell) \mapsto \sum_{i=1}^{\ell} \underline{v}_i$

Laut Notiz 4.22 ist das äquivalent zu:

$$\text{(1)} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i)}_{\langle \bigcup \mathrm{Eig}(f,a_i) \rangle} = V$$

und (2) für alle $\underline{v}_i \in \mathrm{Eig}(f; a_i)$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \underline{v}_i = \underline{0} \implies \underline{v}_1 = \ldots = \underline{v}_\ell = \underline{0}$$

Beweis zu Satz 9.10:

Satz 9.9 zeigt: (2) gilt, unabhängig von Voraussetzungen an f.

Zu zeigen ist also nur: $a \iff (1) \iff c$

$(a \Rightarrow (1))$ klar da V nach Voraussetzung (a) Basis aus EV hat.

$(a \Leftarrow (1))$ Nach Annahme (1) besitzt V ein Erzeugendensystem aus EV. Wähle daraus eine Basis.

$((2) \Leftrightarrow c)$: Erinnerung:

> **5.14 Dimensionsformeln**
> V, V_1, V_2 endlich-erzeugte VR
> U UVR von V
>
> (a) $\dim U = \dim V \iff U = V$
>
> (d) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Aus 5.14(d) folgt:

$$\dim\left(\bigoplus \mathrm{Eig}(f, a_i)\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \dim \mathrm{Eig}(f, a_i)$$

Benutze nun 5.14 (a). $\square$